Références :
Analyse, Xavier Gourdon

Rappel (Théorème de Baire)**.**
Soit (E, d) un espace métrique complet. Alors

(i) Si $(O_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'ouverts denses de E, $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ est encore dense dans E.

(ii) Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fermés d'intérieur vide de E, $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ est encore d'intérieur vide dans E.

Soit E un espace de Banach, F un espace vectoriel normé. On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F, muni de la norme $|||f||| = \sup\limits_{||x||=1} ||f(x)||$.

Théo (Banach-Steinhaus)**.** *Soit $H \subset \mathcal{L}_c(E, F)$. Alors*

- *soit $(|||f|||)_{f\in H}$ est borné*
- *soit il existe $x \in E$ tel que $\sup\limits_{f\in H} ||f(x)|| = +\infty$.*

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons

$$\Omega_k = \{x \in E, \sup_{f\in H} ||f(x)|| > k\}.$$

L'ensemble Ω_k est ouvert. En effet, si $x_0 \in \Omega_k$, il existe $f \in H$ tel que $||f(x_0)|| > k$. Comme f est continue, il existe $\rho > 0$ tel que $||f(x)|| > k$ pour $||x - x_0|| < \rho$. Ainsi, la boule $B(x_0, \rho)$ est contenue dans Ω_k. On se retrouve alors confronté à deux cas :

- Si chaque Ω_k est dense dans E, alors, comme E est complet, le théorème de Baire assure que $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k$ est dense dans E, en particulier non vide. Si on choisit $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k$, on a alors $\sup\limits_{f\in H} ||f(x)|| = +\infty$.
- Sinon, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que Ω_k ne soit pas dense dans E. En d'autres termes, il existe $x_0 \in E$ et $\rho > 0$,

  $$B(x_0, \rho) \cap \Omega_k = \varnothing$$

  de sorte que pour tout $x \in B(x_0, \rho)$, $\sup\limits_{f\in H} ||f(x)|| \leq k$. On en déduit que, pour tout $x \in B(x_0, \rho)$, pour tout $f \in H$

  $$||f(x)|| = ||f(x + x_0) - f(x_0)|| \leq ||f(x + x_0)|| + ||f(x_0)|| \leq 2k.$$

  Par continuité de chaque $f \in H$, cette inégalité reste vraie sur la boule fermée, $B_f(0, \rho)$. Ainsi, pour tout $f \in H$, pour tout $x \in E$ avec $||x|| = 1$,

  $$||f(x) = \frac{1}{\rho}||f(\rho x) \leq \frac{2\rho}{k}.$$

  Ainsi, pour tout $f \in H$,

  $$|||f||| \leq \frac{2k}{\rho},$$

  d'où le résultat.

□

App. Il existe des fonctions continues différentes de leur série de Fourier.

Démonstration. On note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont 2π-périodiques et continues. Pour tout $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, on note

$$\forall p \in \mathbb{Z}, c_p(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ipt}dt.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'application

$$\begin{array}{rcl} l_n : \mathcal{C}_{2\pi} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & \sum\limits_{p=-n}^{n} c_p(f) \end{array}$$

On munit $\mathcal{C}_{2\pi}$ de la norme $||f||_\infty = \sup\limits_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t)|$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrons que l_n est une forme linéaire continue et calculons sa norme.
  On a clairement que l_n est une application linéaire.
  Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$.

$$\begin{aligned} l_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{p=-n}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ipt}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{p=-n}^{n} e^{-ipt}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{p=-n}^{n} e^{ipt}dt \end{aligned}$$

On veut calculer la somme présente dans l'intégrale. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{p=-n}^{n} e^{ipt} &= e^{-int}\sum_{p=-n}^{n} e^{i(p+n)t} \\ &= e^{-int}\sum_{p=0}^{2n} e^{ipt} \\ &= e^{-int}\frac{1-e^{i(2n+1)t}}{1-e^{it}} \\ &= \frac{e^{-it\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{e^{-\frac{it}{2}}}\frac{1-e^{i(2n+1)t}}{1-e^{it}} \\ &= \frac{e^{-it\left(n+\frac{1}{2}\right)}-e^{it\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{e^{-\frac{it}{2}}-e^{\frac{it}{2}}} \\ &= \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \end{aligned}$$

On réinjecte ce résultat dans $l_n(f)$.

$$l_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}\pi\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}f(t)dt.$$

Si $||f||_\infty = 1$,

$$|l_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right|dt. \quad (*)$$

Posons, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} f_\varepsilon : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \frac{D_n(t)}{|D_n(t)|+\varepsilon} \end{aligned}$$

On a bien que $f_\varepsilon \in \mathcal{C}_{2\pi}$ car $D_n \in \mathcal{C}_{2\pi}$.

En effet, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} D_n(t+2\pi) &= \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(t+2\pi)\right)}{\sin\left(\frac{t+2\pi}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t+(2n+1)\pi\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}+\pi\right)} \\ &= D_n(t) \end{aligned}$$

On a, de plus, $||f_\varepsilon||_\infty \leq 1$ et

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}|l_n(f_\varepsilon)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right|dt$$

Ainsi, avec $(*)$, on a

$$|||l_n||| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right|dt$$

et l_n est bien une application linéaire continue.

- Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty}|||l_n||| = +\infty$ et conclure.

On sait que pour $t \in \mathbb{R}$, $\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| \leq \left|\frac{t}{2}\right|$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
|||l_n||| &\geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\frac{t}{2}}\right|dt \\
&\geq \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left|\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\frac{t}{2}}\right|dt \\
&\underbrace{\geq}_{\substack{u=\left(n+\frac{1}{2}\right)t \\ du=\left(n+\frac{1}{2}\right)dt}} \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\left|\frac{\sin(u)}{\frac{u}{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}\right|\frac{du}{\left(n+\frac{1}{2}\right)} \\
&\geq \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\left|\frac{\sin(u)}{u}\right|du
\end{aligned}$$

Or cette intégrale diverge.

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^n\left|\frac{\sin(u)}{u}\right|du &= \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\left|\frac{\sin(u)}{u}\right|du \\
&\geq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin(u)|du \\
&\geq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(u)du \\
&\geq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\pi}[-\cos(u)]_0^{\pi} \\
&\geq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\pi}(\cos(0)-\cos(\pi)) \\
&\geq \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k\pi}
\end{aligned}$$

Cette somme diverge.

Ainsi, on a $\lim\limits_{n\to\infty}|||l_n|||_\infty = +\infty$.

Comme $\mathcal{C}_{2\pi}$ est complet (car fermé dans $B(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui est complet), on peut appliquer le théorème de Banach-Steinhaus.
Il existe donc $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ telle que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|l_n(f)| = +\infty$.

Ainsi, la série de Fourier de f en 0 diverge. La fonction f est donc différente de sa série de Fourier. Ainsi, il existe des fonctions continues différentes de leur série de Fourier.

□